2. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2016. – Вып. 4. – С. 52–61.

3. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. II. Сравнительный анализ моделей с классическим и фантомным полями* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2017. – Вып. 1. – С. 46–65.

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE COSMOLOGICAL MODEL
BASED ON PHANTOM SCALAR FIELD WITH SELF-ACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

On the basis of qualitative analysis, we have identified and clarified the distinctive features of cosmological models with phantom scalar fields with self-interaction.

Keywords: phantom scalar fields, quality analysis.

УДК 517.53

О ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ БАЗИСОВ ИЗ ЭКСПОНЕННТ И ИЗ ЗНАЧЕНИЙ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕГО ЯДРА

К.П. Исаев[1], А.В. Луценко[2], Р.С. Юлмухаметов[3]

1 *orbit81@list.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)
2 *lutsenko.av@ya.ru*; Башкирский государственный университет (БашГУ)
3 *yulmukhametov@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)

Доказано, что безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имеют порождающую функцию тогда и только тогда, когда пространство H устойчиво. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций. Функциональность понимается в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \longrightarrow f(z),\ z \in \mathbb{C}$, непрерывны. В силу самосопряженности гильбертовых пространств эти функционалы порождаются элементами пространства $H - k_z(\lambda)$:

$$\delta_z(f) = f(z) = (f(\lambda), k_z(\lambda))_H,\ \forall f \in H.$$

Функция $K(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H, и этот объект подробно изучен в [1]. Данная работа посвящена вопросам, связанным с базисами и безусловными базисами из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k),\ \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in$

$\mathbb{C}$, $n = 1, \ldots, N$, выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 ||h_n||^2 \le \left|\left| \sum_{n=1}^{N} a_n h_n \right|\right|^2 \le P \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 ||h_n||^2.$$

Базисы и прилегающие вопросы изучались, например, в [3]-[8]. Пространства целых функций рассматривались чаще интегрально-весовые. В работе [7] получены условия, при выполнении которых в абстрактном функциональном гильбертовом пространстве не существует безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра.

Своим происхождением задача о (безусловных) базисах из значений воспроизводящего ядра обязана, видимо, классической теме представления рядами экспонент.

Если X — некоторое гильбертово пространство функций на множестве $G \subset \mathbb{C}$, в котором система всех экспонент e^{zt}, $z \in \mathbb{C}$, полна, то преобразование Фурье-Лапласа

$$\mathscr{L} : S \longrightarrow \widehat{S}(z) = S(e^{zt}),\ z \in \mathbb{C},$$

устанавливает изоморфизм между сопряженным пространством X^* и некоторым пространством целых функций $\widehat{X}$ с наведенной структурой гильбертового пространства. Пространство $\widehat{X}$ будет функциональным, в нем существует воспроизводящее ядро $K(\lambda, z)$. Если $e^{z_k t}$, $k \in \mathbb{N}$, — (безусловный) базис в пространстве X, то система $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$ — (безусловный) базис в пространстве $\widehat{X}$.

Частое применение этой конструкции в явном или неявном виде в теории рядов экспонент связано с тем, что в известных случаях это позволяло воспользоваться аппаратом теории целых функций. А именно, если $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$ — базис в $\widehat{X}$ и $L_k(\lambda)$ — биортогональный базис, то оказывалось, что

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)},\ k \in \mathbb{N},$$

где L — так называемая порождающая целая функция с множеством простых нулей в точках z_k и понятными ограничениями на рост в бесконечности. В общем случае порождающая целая функция может и не существовать.

Для формулировки критерия существования порождающей целой функции дадим определения кратности нуля пространства и устойчивости пространства.

Кратность нуля целой функции f в точке a обозначим через $n_f(a)$, то есть $f^{(j)}(a) = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $j < n_f(a)$.

Определение 1. *Кратностью нуля гильбертового пространства целых функций H в точке a назовем целое число*

$$n_H(a) = \min_{f \in H} n_f(a),$$

то есть

$$f^{(j)}(a) = 0,\ 0 \le j < n_H(a), \forall f \in H.$$

Определение 2. *Пространство H будем называть устойчивым в точке a, если из $f \in H$, $n_f(a) > n_H(a)$ следует, что $f(\lambda)(\lambda - a)^{-1} \in H$. Пространство H будем называть устойчивым, если оно устойчиво в любой точке.*

Теорема 1.

1. Для того чтобы базис из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k)$ имел порождающую функцию достаточно, чтобы хотя бы для одного элемента L_m биортогонального базиса и для всех z_k, $k \neq m$, функция $L_m(\lambda)(\lambda - z_k)^{-1}$ принадлежала пространству H.

2. Если некоторый безусловный базис в пространстве H имеет порождающую функцию, то пространство H устойчиво.

Следствие. *Для того чтобы безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имели порождающую функцию, необходимо и достаточно устойчивости пространства H.*

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале. Пусть $W(t)$ положительная функция на интервале $(-1;1)$ и $L_2(W)$ пространство локально интегрируемых на интервале $(-1;1)$ функций, для которых конечна норма

$$||f||^2 := \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 W(t)dt.$$

Пространство $L_2(W)$ — гильбертово, такие пространство много изучались, в частности, на тему базисов из экспонент [9]. Мы будем предполагать, что все экспоненты e^{zt} входят в пространство $L_2(W)$ и система экспонент $\{e^{zt}\}_{z\in\mathbb{C}}$ полна в этом пространстве. Отсюда следует, что

$$\int_{-1}^{1} W(t)dt < \infty$$

и преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм сопряженного пространства $L_2^*(W)$ и некоторого пространства целых функций $\widehat{L}_2(W)$ с наведенной структурой гильбертового пространства. В работе [10] показано, что когда $W(t) = e^{-2h(t)}$ с выпуклой функцией h, то $\widehat{L}_2(W)$ изоморфно пространству целых функций, удовлетворяющих ограничению на рост

$$|F(z)| \leq \text{Const} \cdot e^{\widetilde{h}(\operatorname{Re} z)},$$

с нормой

$$||F||^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x+iy)|^2 dy d\widetilde{h}'(x)}{K(x)}.$$

Здесь $\widetilde{h}$ — сопряженная по Юнгу

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - h(t)),$$

и

$$K(x) = \int_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}dt.$$

Таким образом, для таких весов пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво. Из следующей теоремы видно, что для произвольных весов устойчивости может и не быть.

Теорема 2. *Если пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво, то функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и*

$$\int_{-1}\left(\int_{-1}^{t} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int^{1}\left(\int_{t}^{1} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty.$$

В следующей теореме приведены достаточные условия устойчивости таких пространств.

Теорема 3. *Если функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и*

$$\int_{-1}\left(\int_{-1}^{t} W(x)dx\right) \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int^{1}\left(\int_{t}^{1} W(x)dx\right) \frac{dt}{W(t)} < \infty,$$

то пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво.

Следствие. *Если функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и W монотонна в окрестности точек ± 1, то пространства $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво.*

Литература

1. Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. – 1950. – V. 68. – № 3. – P. 337–404.

2. Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S. *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels* // Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – V. 864. – P. 214–335.

3. Seip K. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. I* // Reine Angew. Math. – 1992. – V. 429. – P. 91–106.

4. Seip K., Wallsten R. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. II* // Reine Angew. Math. – 1992. – V. 429. – P. 107–113.

5. Borichev A., Dhuez R., Kellay K. *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis. – 2007. – V. 242. – № 2. – P. 563–606.

6. Borichev A., Lyubarski Yu. *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. – 2010. – V. 9. – P. 449–461.

7. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. *Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций* // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 67–77.

8. Baranov A., Belov Yu., Borichev A. *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces* // Studia Mathematica. – 2017. – V. 236. – P. 127–142.

9. Седлецкий А. М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* – М.: Физматлит, 2005. – 504 с.

10. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Математические заметки. – 1990. – Т. 48. – № 5. – С. 80–87.

ON GENERATING FUNCTIONS OF BASES OF EXPONENTIAL FUNCTIONS AND REPRODUCING KERNELS

K.P. Isaev, A.V. Lutsenko, R.S. Yulmukhametov

It is proved that an unconditional basis in a functional Hilbert space H have a generating function if and only if the space H is stable. Necessary and sufficient conditions for the stability of spaces conjugate to weighted spaces on an interval are obtained.

Keywords: Hilbert spaces, entire functions, reproducing kernels, unconditional bases.

УДК 517.54

УСИЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА БОРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Исмагилов[1], И.Р. Каюмов[2], С. Поннусами[3], А.В. Каюмова[4], Н.З. Шакиров[5]

1 *amir.ismagilov@list.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского
2 *ilgis.kayumov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского
3 *samy@iitm.ac*; Indian Statistical Institute
4 *anvas@inbox.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и информационных систем
5 *nail-1515@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

Улучшена оценка Бора для аналитических функций f, приведенная в работах И.Р. Каюмова и С. Поннусами. А именно, доказано неравенство $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k+\frac{16}{9\pi}S_r+\lambda S_r^2\le 1,\quad r\le\frac{1}{3}$, где $\lambda=18.6095\ldots$ – положительный вещественный корень уравнения $5509980288x^5-97745285925x^4-87178893840x^3-37178714880x^2-6268596224x-285212672=0$ и $S_r=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|^2r^{2k}$ – площадь образа круга $|z|<r$ под действием функции f, аналитической в единичном круге D такой, что $|f(z)|\le 1$, $z\in D$. Оценка является неулучшаемой.

Ключевые слова: аналитические функции, геометрическая теория функций комплексного переменного, радиус Бора.

В 1914 г. Харальд Бор доказал, что если для функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, определенной в области $D:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, выполняется условие $|f(z)|\le 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k\le 1$ для всех $|z|=r\le\frac{1}{6}$. Далее в работах Н. Винера, Ф. Риса и И. Шура было доказано, что число $1/6$ может быть заменено на константу $1/3$, которая не может быть увеличена.

Недавно И.Р. Каюмовым совместно с С. Поннусами было доказано неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k+\frac{16}{9\pi}S_r\le 1,\quad r\le\frac{1}{3},\tag{1}$$

где $S_r=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|^2r^{2k}$ – площадь образа круга $|z|<r$ под действием функции f.

Нам удалось улучшить оценку (1). А именно, справедлива

Теорема. *Пусть аналитичная в круге D функция $f(z)$, такая что $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$*